

Ein Iterationsverfahren zur gleichzeitigen Berechnung der Beanspruchungsgrößen und der Durchbiegung einer kreissymmetrischen Ringplatte

Günther, Wilhelm

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen
Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 4, 1952,
S. 94-106



Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig

Ein Iterationsverfahren zur gleichzeitigen Berechnung der Beanspruchungsgrößen und der Durchbiegung einer kreissymmetrischen Ringplatte

Von **Wilhelm Günther**, Braunschweig

Mit 3 Abbildungen

Vorgelegt von Herrn **H. Schaefer**

Summary: The symmetrical bending of a circular plate of variable thickness with a circular hole at the center and with a symmetrical load distribution is discussed. This problem leads to a system of four differential equations of the first order for the geometrical and dynamical magnitudes of the plate. Under certain conditions, this system can be solved by iteration. The problem of convergence is discussed using one of the related integral equations, arising from a Hilbert variational principle. In the case of convergence the solution of the problem can be obtained by successive numerical integrating processes.

Inhaltsübersicht

Für eine Kreisringplatte herrsche geometrisch und dynamisch Kreissymmetrie. Die Plattendicke kann dabei noch veränderlich und etwa numerisch vorgegeben sein. Es wird ein System von vier Differentialgleichungen 1. Ordnung für die Beanspruchungen und die geometrischen Größen der durchgebogenen Platte angegeben, das iterationsfähig ist. Die Frage nach der Konvergenz des Iterationsverfahrens wird dadurch erledigt, daß man zu einer der Integralgleichungen des Plattenproblems übergeht, die einem Hilbertschen Variationsproblem entspricht. Der Iteration des Differentialgleichungssystems entspricht die Bildung der „Neumannschen Reihe“ dieser Integralgleichung; die Konvergenzuntersuchung reduziert sich damit auf die Aufgabe, den kleinsten Eigenwert des Kernes der Integralgleichung zu finden. Es werden Verfahren angegeben, die es gestatten, diesen Eigenwert einzugrenzen. Ist Konvergenz vorhanden, so erhält man die gesuchten Plattenfunktionen durch eine Folge reiner Integrationsprozesse, die auch numerisch abgewickelt werden können.

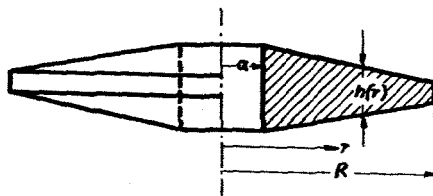


Abb. 1

Wir benutzen folgende Bezeichnungen (Abb. I):

Außenradius der Ringplatte	R
Innenradius der Ringplatte	a
Laufender Radius	r
Plattendicke	$h(r)$

Plattensteifigkeit	$N(r) = \frac{E \cdot h^3(r)}{12(1-\nu^2)}$
(Elastizitätsmodul E , Querkontraktionsziffer ν)	
Durchbiegung	$w(r)$
Radiales Biegemoment	$m_r(r)$
Tangentiales Biegemoment	$m_\varphi(r)$
Querkraft	$p_r(r)$
Belastung	$P(r)$

Die — hier als bekannt vorausgesetzten — Plattengleichungen sind (α) die Spannungs-Formänderungsbeziehungen

$$m_r = -N(r) \left[w'' + \frac{\nu}{r} w' \right], \quad (\alpha_1)$$

$$m_\varphi = -N(r) \left[\nu \cdot w'' + \frac{1}{r} w' \right] \quad (\alpha_2)$$

mit $w' = \frac{dw}{dr}$ usw.;

(β) die Gleichgewichtsbedingungen

$$(rp_r)' = -rP(r), \quad (\beta_1)$$

$$(rm_r)' = rp_r + m_\varphi. \quad (\beta_2)$$

Diese Gleichungen gelten unter der Voraussetzung kleiner Durchbiegungen und unter Vernachlässigung der Querkraftverformung.

Um aus den Gleichungen (α) und (β) ein iterationsfähiges System zu gewinnen, führe ich folgende Funktionen ein:

$Q_1 = w$ Durchbiegung der Platte;

$Q_2 = w'$ Neigung der Platte;

$P_1 = 2\pi \cdot r p_r$ Querkraft am Umfang eines Schnittes
 $r = \text{const.}$

$P_2 = -2\pi \cdot r m_r$ Umfangsmoment am Schnitt $r = \text{const.}$

$P^*(r) = 2\pi r \cdot P(r)$ Belastung eines Ringes vom Radius r mit
der gedachten Breite 1;

und $N^*(r) = 2\pi \cdot N(r)$.

Ferner erweist sich die Einführung eines Parameters $\lambda = -(1-\nu^2)$ als zweckmäßig. Mit Hilfe von (α₂) läßt sich nun in (β₂) das tangentielle Biegemoment eliminieren, und man erhält mit den soeben eingeführten Bezeichnungen das Differentialgleichungssystem (DGL-System):

$$Q_1' = Q_2,$$

$$P_1' = -P^*(r),$$

$$Q_2 + \frac{\nu}{r} Q_2 = \frac{P_2}{r N^*(r)},$$

$$P_2 - \frac{\nu}{r} P_2 = -\lambda \frac{N^*(r)}{r} Q_2 - P_1.$$

Um sich von den speziellen Abmaßen der Platte unabhängig zu machen, führt man dimensionslose Größen bzw. Plattenfunktionen ein durch

$$r = R \cdot \varrho, \quad N^*(r) = N_0^* \cdot \vartheta(\varrho),$$

wobei N_0^* eine geeignet zu wählende Bezugssteifigkeit ist, und

$$\begin{aligned} Q_1 &= R q_1, & P_1 &= \frac{N_0^*}{R} p_1, & P^*(r) &= \frac{N_0^*}{R^2} f(\varrho), \\ Q_2 &= q_2, & P_2 &= N_0^* p_2, \end{aligned}$$

So erhält man die Plattengleichungen in dimensionsloser Form:

$$\left. \begin{aligned} q_1' &= q_2, \\ q_2' + \frac{r}{\varrho} q_2 &= \frac{p_2}{\varrho \vartheta(\varrho)}, \end{aligned} \right\} \text{(a)} \quad \left. \begin{aligned} p_1' &= -f(\varrho), \\ p_2' - \frac{r}{\varrho} p_2 &= -\lambda \frac{\vartheta(\varrho)}{\varrho} q_2 - p_1 \end{aligned} \right\} \text{(b)}$$

mit $q_1' = \frac{d q_1}{d \varrho}$ usw.

Der Vergleich dieses Systems mit den DGLn der elementaren Biegetheorie des geraden Balkens:

$$\left. \begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y', \\ \frac{dy'}{dx} &= -\frac{M}{E \cdot I(x)}, \end{aligned} \right\} \text{(a)} \quad \left. \begin{aligned} \frac{dQ}{dx} &= -q(x), \\ \frac{dM}{dx} &= Q \end{aligned} \right\} \text{(b)}$$

ist nicht ohne Interesse. Ist der Balken statisch bestimmt gestützt, so kann man aus den DGLn (b) das Biegemoment M und die Querkraft Q bestimmen, ohne auf die Spannungs-Formänderungsbeziehungen (a) eingehen zu müssen. Ist die Stützung n -fach statisch unbestimmt, so hängt die Lösung der Gleichgewichtsbedingungen (b) von n Konstanten (den überzähligen Auflagerreaktionen) ab. Diese werden dann bei der Integration der DGLn (a) festgelegt, wo man n geometrische Rand- bzw. Übergangsbedingungen zu viel hat. Im Falle der kinematisch unbestimmten Stützung schließlich (man möge ihn sich realisiert denken durch eine offene Kette von m gelenkig miteinander verbundenen Balken, die einmal zweiwertig und $(m - n)$ -mal einwertig abgestützt ist, wobei höchstens n Balken ohne Stützung sind), wenn also in den Gleichgewichtsbedingungen (b) n dynamische Randbedingungen überzählig sind, ist das Balkensystem beweglich — es fehlen nämlich in den DGLn (a) n geometrische Randbedingungen —, und es ist Gleichgewicht nur möglich, wenn die Belastung bestimmten Bedingungen genügt.

Die Platte hingegen ist „funktional statisch unbestimmt“ („innerlich statisch unbestimmt“), denn die Gleichgewichtsbedingungen enthalten, für sich betrachtet, eine willkürliche Funktion q_2 ; sie reichen daher auch dann zur Berechnung des Umfangsmomentes nicht aus, wenn bei bekanntem q_2 die Auflager- und Übergangsreaktionen ermittelt werden könnten. Wir wollen jedoch in Anlehnung an die Sprechweise der Balkentheorie die Ringplatte als statisch bestimmt, statisch unbestimmt, kinematisch unbestimmt gestützt bezeichnen, wenn es der einem radialen Plattenschnitt entsprechend gelagerte Balken ist (Abb. 2). Man entnimmt der Abb. 2, daß auch bei kinematisch unbestimmter Stützung die Platte unbeweglich gelagert ist, im Gegensatz zu analog gestützten Balken. —

Der Aufbau der Plattengleichungen (a) und (b) legt den Versuch nahe, sie mit Hilfe eines Iterationsprozesses zu lösen. Im Falle statisch bestimmter Stützung etwa so: Man nehme in den DGLn (b) für die Platten-

neigung $q_2(\varrho)$ irgendeine Näherungsfunktion $q_2^{(0)}$ an und berechne durch Integration dieser Gleichungen Näherungsfunktionen $p_1^{(1)}$ und $p_2^{(1)}$ für die Umfangskraft und das Umfangsmoment. Setzt man $p_2^{(1)}$ in das System (a) ein, so gewinnt man durch Integration Näherungslösungen $q_2^{(1)}$ und $q_1^{(1)}$ für Neigung und Durchbiegung der Platte. Mit $q_2^{(1)}$ in die DGLn (b) hinein gehend wiederholt man den Prozeß, der jetzt zu den Näherungsfunktionen $p_1^{(2)}, p_2^{(2)}$, und über (a) zu $q_2^{(2)}, q_1^{(2)}$ führt, usw. Unterscheiden sich, im Rahmen der vorgegebenen oder erreichbaren Rechengenauigkeit, die Funktionen $q_1^{(n+1)}, \dots, p_2^{(n+1)}$ nicht mehr von den Funktionen $q_1^{(n)}, \dots, p_2^{(n)}$ kommt also das Verfahren „zum Stillstand“, so ist die Aufgabe mit der entsprechenden Genauigkeit gelöst.

Bei kinematisch unbestimmter Stützung wird man, z.B. im Falle der Abb. 2, III, so vorgehen: In den DGLn (a) wählt man irgendeine Näherungsfunktion $p_2^{(0)}$ für das Umfangsmoment. Die Lösungen $q_2^{(0)}$ und $q_1^{(0)}$ der DGLn (a) enthalten eine willkürliche Konstante c_0 , da man eine geometrische Randbedingung zu wenig hat. Mit der Näherungsfunktion $q_2^{(0)}$ geht man in die Gleichgewichtsbedingungen (b) ein, aus denen man durch Integration die Näherungsfunktionen $p_1^{(1)}$ und $p_2^{(1)}$ bestimmt, unter Elimination der Konstanten c_0 mit Hilfe der überzähligen dynamischen Randbedingung. Mit $p_2^{(1)}$ statt $p_2^{(0)}$ beginnt dann in den DGLn (a) der neue Kreisprozeß. Analog geht man bei statisch unbestimmter Stützung vor, wie wohl nicht näher ausgeführt zu werden braucht.

Jedenfalls liefert das Verfahren, wenn es konvergiert, in durchsichtiger Weise die gesuchten Plattenfunktionen q_1, q_2, p_1, p_2 , wobei man es noch in der Hand hat, die Rechengenauigkeit — die Integrationen lassen sich bequem numerisch durchführen — und den Grad der Annäherung den praktischen Bedürfnissen anzupassen. Aber die gewünschte Konvergenz ist keineswegs immer vorhanden, und wir müssen uns daher nach einem Konvergenzkriterium umsehen. Es entspricht nun ganz dem Sinne unseres Verfahrens, das keine Differentiations-, sondern nur Integrationsprozesse benutzt, wenn wir für die Konvergenzuntersuchung zu einer Integralgleichung (IGL) übergehen, die dem DGL-System (a), (b) mitsamt seinen Randbedingungen äquivalent ist. Das empfiehlt sich auch deshalb, weil wir uns nach dem Übergang zur IGL auf die fertig vorliegenden Methoden der IGL-Theorie stützen können.

Um diesen Übergang in rationeller Weise durchzuführen, gehen wir von der Tatsache aus, daß die Plattengleichungen (a) und (b) die Eulerschen DGLn eines Variationsproblems sind. Führen wir nämlich eine Funktion $H(q_1, q_2; p_1, p_2; \varrho)$ der vier Plattenfunktionen und der unabhängigen Ver-

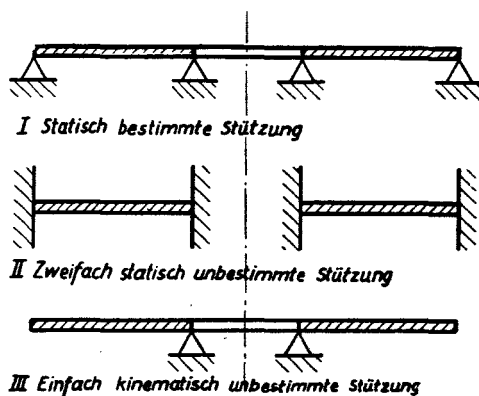


Abb. 2

änderlichen ϱ ein durch

$$H(q_1, q_2; p_1, p_2; \varrho) = \frac{1}{2} \left[\frac{p_1^2}{\varrho} - 2\gamma \cdot \frac{p_2 q_2}{\varrho} + \lambda \frac{\partial(\varrho)}{\varrho} q_2^2 \right] + p_1 q_2 + q_1 f(\varrho),$$

und betrachten im Integrationsgebiet $\frac{\alpha}{R} = \alpha \leq \varrho \leq 1$ das Variationsproblem (K_1) :

$$\delta \int_{\alpha}^1 [p_1 p_1' + p_2 q_2' - H(q_1, q_2; p_1, p_2; \varrho)] d\varrho = 0,$$

so entstehen bei der Variation des Integranden nach den als voneinander unabhängig anzusehenden Funktionen q_1, q_2, p_1, p_2 die DGLn

$$\begin{aligned} q_1' &= \frac{\partial H}{\partial p_1}, & p_1' &= -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \\ q_2' &= \frac{\partial H}{\partial p_2}, & p_2' &= -\frac{\partial H}{\partial q_2} \end{aligned}$$

als notwendige Extremumsbedingungen, denen die Lösungen des Variationsproblems (K_1) genügen müssen. Die Nachrechnung ergibt, daß dies gerade die Plattengleichungen (a) und (b) sind. Ferner ergeben sich die Rand- und Übergangsbedingungen

$$p_1 \delta q_1 + p_2 \delta q_2 = 0$$

an den Rändern $\varrho = \alpha, \varrho = 1$ des Integrationsgebietes und an den Übergangsstellen $\varrho_{\mu} = \alpha_{\mu}$.

Sind also, beispielsweise in einem freien Rand, Durchbiegung und Neigung unbekannt ($\delta q_1, \delta q_2$ unbekannt), so ergibt die obige Randbedingung, daß in diesem Rand Umfangsmoment und Querkraft verschwinden müssen, wie es ja den tatsächlichen Verhältnissen entspricht. Solche sich von selbst aus der Extremumsforderung ergebenden Randbedingungen heißen „natürliche Randbedingungen“ des Variationsproblems, im Gegensatz zu den „Zwangsbedingungen“, die am Rande den zu variierenden Funktionen von vornherein auferlegt sind. Zum Variationsproblem (K_1) gehören also als Zwangsbedingungen die geometrischen Randbedingungen, während sich die dynamischen Randbedingungen als natürliche Randbedingungen dort ergeben, wo die entsprechenden Zwangsbedingungen fehlen.

Ein weiteres Variationsproblem (K_2) :

$$\delta \int_{\alpha}^1 [q_1 p_1' + q_2 p_2' + H(q_1, q_2; p_1, p_2; \varrho)] d\varrho = 0$$

liefert ebenfalls die Plattengleichungen; gegenüber (K_1) vertauschen jedoch in (K_2) Zwangsbedingungen und natürliche Randbedingungen ihre Rollen. Mit dem Variationsproblem (V.P.) (K_1) [bzw. (K_2)] haben wir unserer Plattenaufgabe ein „kanonisches Variationsproblem“ zugeordnet; die Plattengleichungen (a) und (b) sind die zugehörigen „kanonischen Gleichungen“. (Systematisch gewinnt man diese Darstellung über eine „Legendresche Transformation“ aus dem Prinzip vom Minimum der potentiellen Energie).

Die Freiheit, im kanonischen V.P. alle Plattenfunktionen unabhängig voneinander variieren zu können, schränken wir nun dahingehend ein, daß wir im V.P. einen Teil der durch die DGLn des Problems gegebenen Zusammen-

hänge berücksichtigen. Um ein Beispiel vor Augen zu haben, zeigen wir den Vorgang für eine Ringplatte, die im Außenrand ($\varrho = 1$) eingespannt ist und im Innenrand ($\varrho = a$) so geführt wird, daß dort ihre Neigung Null ist [$q_2(a) = 0$]; Abb. (3):

Drei geometrischen Randbedingungen: $q_1(1) = 0$, $q_2(1) = 0$, $q_2(a) = 0$ steht eine dynamische Randbedingung gegenüber: $p_1(a) = 0$. Die Platte ist also einfach statisch unbestimmt gestützt. Man beachte, daß hier die homogenen Gleichgewichtsbedingungen (b) für $\lambda = 0$ die Lösung

$$p_1(\varrho) = 0, \quad p_2(\varrho) = X \cdot \varrho^v$$

mit einer willkürlichen Konstanten X haben.

Wir lassen nun im V.P. (K_2) nur solche Funktionen zur Konkurrenz zu, die den DGln (b) genügen, und erreichen dies, indem wir — zunächst ganz formal — im V.P. (K_2) die Ableitungen p_1 und p_2 gemäß (b) durch p_1 , p_2 und q_2 ersetzen. Dann entsteht ein V.P. (B):

$$\delta \frac{1}{2} \int_a^1 \left[\frac{p_1^2}{\varrho \frac{\partial}{\partial \varrho}} - \lambda \cdot \frac{\partial(\varrho)}{\varrho} q_2^2 \right] d\varrho = 0$$

unter den Nebenbedingungen (b):

$$p_1' = -f(\varrho), \quad p_2' - \frac{v}{\varrho} p_2 = -\lambda \frac{\partial(\varrho)}{\varrho} q_2 - p_1$$

mit $p_1(a) = 0$. Der Sinn dieses V.P. ist: Man wähle für die Neigung $q_2(\varrho)$ irgendeine Funktion, bestimme durch Integration der DGln (b) das Umfangsmoment p_2 als Funktion der Belastung (die Umfangskraft p_1 ist nach der ersten der DGln (b) als bekannt anzusehen), setze alles in das V.P. (B) ein und lege die willkürliche Funktion q_2 durch die Extremumsforderung fest. Analytisch: Durch Integration der zweiten Gleichgewichtsbedingung erhält man:

$$p_2(\varrho) = X \varrho^v - \int_a^{\varrho} \varrho^v \sigma^{-v} \left[\lambda \cdot \frac{\partial(\sigma)}{\sigma} q_2(\sigma) + p_1(\sigma) \right] d\sigma$$

oder, mit

$$\mathfrak{M}_0(\varrho, \sigma) = \begin{cases} \varrho^v \sigma^{-v} & \text{für } a \leq \sigma \leq \varrho \leq 1, \\ 0 & \text{für } a \leq \varrho \leq \sigma \leq 1: \end{cases}$$

$$p_2(\varrho) = X \cdot \varrho^v - \int_a^1 \mathfrak{M}_0(\varrho, \sigma) \left[\lambda \frac{\partial(\sigma)}{\sigma} q_2(\sigma) + p_1(\sigma) \right] d\sigma.$$

Durch die Einführung des (unsymmetrischen) „Kernes“ $\mathfrak{M}_0(\varrho, \sigma)$ haben wir es erreicht, daß die Integration über dasselbe Grundgebiet erfolgt wie im V.P. (B).

Wir führen ein:

$$\varphi(\varrho) = \varrho^v, \quad g(\varrho) = \lambda \frac{\partial(\varrho)}{\varrho} q_2(\varrho) + p_1(\varrho)$$

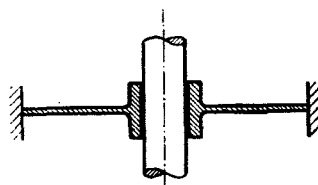


Abb. 3

und bilden:

$$p_2^2(\varrho) = X^2 \varphi^2(\varrho) - 2X \cdot \int_{\alpha}^1 \mathfrak{M}_0(\varrho, \sigma) \cdot \varphi(\varrho) \cdot g(\sigma) d\sigma \\ + \int_{\alpha}^1 \int_{\alpha}^1 \mathfrak{M}_0(\varrho, \sigma) \mathfrak{M}_0(\varrho, \tau) g(\sigma) g(\tau) d\sigma d\tau.$$

Dies setzen wir in das V.P. (B) ein und bekommen:

$$\delta \frac{1}{2} \left\{ X^2 \cdot \int_{\alpha}^1 \frac{\varphi^2(\varrho)}{\varrho^{\frac{1}{2}}(\varrho)} d\varrho - 2X \cdot \int_{\alpha}^1 \mathfrak{G}(\sigma) g(\sigma) d\sigma \right. \\ \left. + \int_{\alpha}^1 \int_{\alpha}^1 K_0(\sigma, \tau) g(\sigma) g(\tau) d\sigma d\tau - \lambda \cdot \int_{\alpha}^1 \frac{\vartheta(\sigma)}{\sigma} q_2^2(\sigma) d\sigma \right\} = 0 \quad (*)$$

mit
$$\mathfrak{G}(\sigma) = \int_{\alpha}^1 \mathfrak{M}_0(\varrho, \sigma) \cdot \frac{\varphi(\varrho)}{\varrho^{\frac{1}{2}}(\varrho)} d\varrho$$

und
$$K_0(\sigma, \tau) = \int_{\alpha}^1 \mathfrak{M}_0(\varrho, \sigma) \cdot \frac{1}{\varrho^{\frac{1}{2}}(\varrho)} \cdot \mathfrak{M}_0(\varrho, \tau) d\varrho.$$

Der symmetrische „Kern“ $K_0(\sigma, \tau)$ ist, als Funktion von σ und τ , stetig und, wie sich zeigen läßt*), positiv definit. Für $\alpha > 0$ ist er beschränkt.

Die Konstante X und die Funktion q_2 müssen nun so bestimmt werden, daß die Extremumsforderung erfüllt wird. Zunächst ermitteln wir X , indem wir in (*) nach X differenzieren und das Ergebnis gleich Null setzen. Das ergibt:

$$X = \frac{\int_{\alpha}^1 \mathfrak{G}(\sigma) g(\sigma) d\sigma}{\int_{\alpha}^1 \frac{\varphi^2(\varrho)}{\varrho^{\frac{1}{2}}(\varrho)} d\varrho}.$$

Mit diesem Wert gehen wir in (*) ein. Dann entsteht ein neues V.P. (B₂):

$$\delta \frac{1}{2} \left\{ \int_{\alpha}^1 \int_{\alpha}^1 \bar{K}(\sigma, \tau) \left[\lambda \frac{\vartheta(\sigma)}{\sigma} q_2(\sigma) + p_1(\sigma) \right] \left[\lambda \frac{\vartheta(\tau)}{\tau} q_2(\tau) + p_1(\tau) \right] d\sigma d\tau \right. \\ \left. - \lambda \int_{\alpha}^1 \frac{\vartheta(\sigma)}{\sigma} q_2^2(\sigma) d\sigma \right\} = 0,$$

mit dem ebenfalls symmetrischen, stetigen, positiv definiten und für $\alpha > 0$ beschränkten Kern

$$\bar{K}(\sigma, \tau) = K_0(\sigma, \tau) - \frac{\mathfrak{G}(\sigma) \cdot \mathfrak{G}(\tau)}{\int_{\alpha}^1 \frac{\varphi^2 \varrho}{\varrho^{\frac{1}{2}}(\varrho)} d\varrho}.$$

*) Vgl. W. Günther, „Die Biegung kreissymmetrischer Ringplatten veränderlicher Dicke als Problem der Variationsrechnung“, Diss. Braunschweig 1946.

Durch Variation nach q_2 entspringt diesem „Hilbertschen Variationsproblem“ eine „Integralgleichung zweiter Art“:

$$q_2(\sigma) - \lambda \int_a^1 \bar{K}(\sigma, \tau) \frac{\partial(\tau)}{\tau} q_2(\tau) d\tau = \int_a^1 \bar{K}(\sigma, \tau) p_1(\tau) d\tau = \bar{F}(\sigma)$$

für die Plattenneigung q_2 . Sie läßt sich leicht vollständig symmetrisieren durch die Substitutionen

$$y(\sigma) = q_2(\sigma) \cdot \sqrt{\frac{\partial(\sigma)}{\sigma}}, \quad F(\sigma) = \bar{F}(\sigma) \cdot \sqrt{\frac{\partial(\sigma)}{\sigma}},$$

$$K(\sigma, \tau) = \bar{K}(\sigma, \tau) \cdot \sqrt{\frac{\partial(\sigma)}{\sigma} \cdot \frac{\partial(\tau)}{\tau}},$$

und nimmt dann die in der IGL-Theorie gebräuchliche Form

$$y(\sigma) - \lambda \int_a^1 K(\sigma, \tau) y(\tau) d\tau = F(\sigma)$$

an.

Wir haben damit die vier Plattengleichungen (a) und (b) in eine IGL für die Plattenneigung umgesetzt, in die schon sämtliche Randbedingungen des Problems hineingearbeitet sind: die dynamische Randbedingung $p_1(a) = 0$ wurde bei der Berechnung der Funktion $F(\sigma)$ benutzt, während die drei geometrischen Randbedingungen als die natürlichen Randbedingungen des V.P. (B) den Aufbau des Kernes $K(\sigma, \tau)$ bestimmen. Tatsächlich haben wir auf dem Wege über das V.P. (B) nur die Aufgabe gelöst, aus den Plattengleichungen durch Elimination des Umfangsmomentes p_2 bei gleichzeitiger Integration eine einzige Gleichung für die Neigung q_2 herzustellen, und zwar mit Berücksichtigung aller Randbedingungen des Problems. Dieser Prozeß hätte sich auch an den DGLn (a) und (b) selbst durchführen lassen, also ohne Benutzung eines V.P. Unser Verfahren trägt aber insofern weiter, als es einen systematischen Weg zur Behandlung auch komplizierterer Probleme vorzeichnet. Es ist nun leicht, ein Konvergenzkriterium für unser Iterationsverfahren zu finden. Der Kern $K(\sigma, \tau)$ hat abzählbar unendlich viele reelle, positive Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2, \dots$, die wir uns der Größe nach geordnet denken: $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$. Zu diesen Eigenwerten gehören Lösungen $y_i(\sigma)$ der homogenen IGL:

$$y_i(\sigma) - \lambda_i \int_a^1 K(\sigma, \tau) y_i(\tau) d\tau = 0.$$

Diese Lösungen denken wir uns orthonormiert, d.h. es sei:

$$\int_a^1 y_i(\sigma) y_k(\sigma) d\sigma = \begin{cases} 0 & \text{für } i \neq k, \\ 1 & \text{für } i = k. \end{cases}$$

Nach dem Mercerschen Satz ist der Kern nach diesen „Eigenfunktionen“ y_i entwickelbar:

$$K(\sigma, \tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{y_i(\sigma) y_i(\tau)}{\lambda_i},$$

und diese Reihe konvergiert gleichmäßig und absolut in beiden Variablen σ und τ .

Unser Iterationsverfahren ist nun genau der folgenden iterativen Auflösung der soeben aufgestellten IGL äquivalent (wir formulieren es der Einfachheit halber für y statt für q_2): Man wähle eine Funktion $y^{(0)}(\tau)$ und bestimme mit Hilfe von

$$y^{(1)}(\sigma) = F(\sigma) + \lambda \int_{\alpha}^1 K(\sigma, \tau) y^{(0)}(\tau) d\tau$$

eine neue Funktion $y^{(1)}(\sigma)$; mit Hilfe von

$$y^{(2)}(\sigma) = F(\sigma) + \lambda \int_{\alpha}^1 K(\sigma, \tau) y^{(1)}(\tau) d\tau$$

eine weitere Funktion $y^{(2)}(\sigma)$, allgemein eine Funktionenfolge $y^{(m)}(\sigma)$ durch

$$y^{(m)}(\sigma) = F(\sigma) + \lambda \int_{\alpha}^1 K(\sigma, \tau) y^{(m-1)}(\tau) d\tau.$$

Wenn diese Folge konvergiert, löst die Grenzfunktion

$$y(\sigma) = \lim_{m \rightarrow \infty} y^{(m)}(\sigma)$$

die IGL. Zur Konvergenzuntersuchung setzen wir an:

$$y^{(m)}(\sigma) = y(\sigma) + \Delta^{(m)} y(\sigma);$$

$\Delta^{(m)} y(\sigma)$ ist also die Abweichung der m -ten Näherungsfunktion von der wahren Lösung. Für diese Abweichungen ergibt sich:

$$\Delta^{(m)} y(\sigma) = \lambda \int_{\alpha}^1 K(\sigma, \tau) \Delta^{(m-1)} y(\tau) d\tau.$$

Für $m > 0$ sind die $\Delta^{(m)} y$ nach den Eigenfunktionen $y_i(\sigma)$ entwickelbar:

$$\Delta^{(m)} y(\sigma) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(m)} y_i(\sigma).$$

Diese Reihen konvergieren ebenfalls gleichmäßig und absolut. Berücksichtigt man die Entwicklung des Kernes $K(\sigma, \tau)$ nach seinen Eigenfunktionen sowie die Orthonormierungsbedingungen, so entsteht:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(m)} y_i(\sigma) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\lambda}{\lambda_i} a_i^{(m-1)} y_i(\sigma),$$

und hieraus schließt man leicht für die Entwicklungskoeffizienten $a_i^{(m)}$:

$$a_i^{(m)} = \frac{\lambda}{\lambda_i} a_i^{(m-1)},$$

und weiter:

$$a_i^{(m)} = \left(\frac{\lambda}{\lambda_i} \right)^{m-1} a_i^{(1)}.$$

Es wird somit

$$|\Delta^{(m)} y(\sigma)| = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{|\lambda|}{\lambda_i} \cdot |a_i^{(1)} y_i(\sigma)|.$$

Der zweite Faktor in der Summe ist beschränkt, es ist daher offensichtlich dann und nur dann $\lim_{m \rightarrow \infty} |\Delta^{(m)} y(\sigma)| = 0$ wenn $|\lambda| < \lambda_1$ ist. Dann und nur dann also, wenn $|\lambda| = 1 - \nu^2$ kleiner ist als der erste Eigenwert λ_1 der homogenen IGL [und damit auch des homogenen DGL-Systems (a), (b)], konvergiert das Iterationsverfahren. Je nach Lage der Dinge hat man nun verschiedene Möglichkeiten, die Konvergenz zu prüfen (d.h. Aussagen über den kleinsten Eigenwert λ_1 zu machen).

[1] Exakte Bestimmung des ersten Eigenwertes

Ist die Plattensteifigkeit konstant, so sind die Lösungen des homogenen DGL-Systems:

$$q_{1i} = c_{0i} \cdot 1 + c_{1i} \cdot \varrho^2 + c_{2i} \cdot \cos[\sqrt{\lambda_i - \nu^2} \ln \varrho] + c_{3i} \cdot \sin[\sqrt{\lambda_i - \nu^2} \ln \varrho].$$

Die Eigenwerte λ_i ergeben sich aus den Randbedingungen. So bekommt man beispielsweise für den Fall der Abb. 3 die Eigenwertgleichung

$$\sin[\sqrt{\lambda_i - \nu^2} \ln \alpha] = 0,$$

woraus sich λ_1 zu

$$\lambda_1 = \frac{\pi^2}{\ln^2 \alpha} + \nu^2$$

ergibt.

Die Konvergenzbedingung: $1 - \nu^2 < \lambda_1$ geht damit über in eine Bedingung für den Innenradius der Platte:

Das Iterationsverfahren konvergiert dann und nur dann, wenn

$$\alpha > e^{\frac{\pi}{\sqrt{1-\nu^2}}}$$

ist, z. B. für $\nu = 0,3$: $\alpha > 0,0312$.

Dieselbe Eigenwertgleichung hat auch der Fall der Abb. 2, III, konstante Plattensteifigkeit vorausgesetzt. Schließlich sei noch die im Innenrand freie, im Außenrand eingespannte Platte konstanter Steifigkeit erwähnt, deren Eigenwertgleichung:

$$\nu \cdot \operatorname{tg} \left[\sqrt{\lambda_i - \nu^2} \ln \frac{1}{\alpha} \right] = \sqrt{\lambda_i - \nu^2}$$

sich in die Bedingung

$$\alpha > e^{-\frac{1}{\sqrt{1-\nu^2}} \operatorname{arctg} \sqrt{1-\nu^2}}$$

umsetzen läßt.

Im allgemeinen wird es nicht möglich sein, den 1. Eigenwert exakt zu finden; sei es, daß, bei mehrfach statisch oder kinematisch unbestimmten

Stützungen, die Eigenwertgleichung zu kompliziert wird, sei es, daß die Plattendicke veränderlich (z. B. numerisch vorgegeben) ist. Man muß dann Näherungsverfahren benutzen.

[II] Untere Grenze für den ersten Eigenwert

Man kann den ersten Eigenwert nach unten hin abschätzen, indem man die Entwicklung des Kerns $K(\sigma, \tau)$ nach seinen (orthonomierten) Eigenfunktionen benutzt. Diese liefern nämlich

$$\int_a^1 K(\sigma, \sigma) d\sigma = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i};$$

und hieraus gewinnt man sofort die Abschätzung:

$$\lambda_1 > \frac{1}{\int_a^1 K(\sigma, \sigma) d\sigma},$$

und damit ein Konvergenzkriterium, das zwar sehr grob, aber für unsere Zwecke insofern brauchbar ist, als die Abschätzung nach der richtigen Seite hin erfolgt: Das Iterationsverfahren konvergiert sicher, wenn

$$1 - \nu^2 < \frac{1}{\int_a^1 K(\sigma, \sigma) d\sigma}$$

ist.

[III] Obere Grenze für den ersten Eigenwert

Zur Abschätzung nach oben hin benutzt man zweckmäßig das V.P. (B), kombiniert mit dem Ritzschen Verfahren: Man setzt mit vorgegebenen Funktionen $f_i(\varrho)$ an:

$$q_{2n}(\varrho) = \sum_{i=1}^n A_i f_i(\varrho)$$

und berechnet durch Integration der DGL

$$p'_{2n} - \frac{\nu}{\varrho} p_{2n} = -\lambda \frac{\vartheta(\varrho)}{\varrho} q_{2n}$$

eine Funktion

$$p_{2n} = \lambda \sum_{i=1}^n A_i g_i(\varrho).$$

Bei dieser Integration sind die Randbedingungen für Umfangsmoment und Umfangskraft zu beachten. Nachdem man q_{2n} und p_{2n} in das V.P. (B) eingesetzt hat, erfüllt man die Extremumsforderung im gegebenen Funktionsbereich, indem man (im Sinne eines gewöhnlichen Extremumsproblems) nach den Konstanten A_i differenziert und das Ergebnis gleich Null setzt. Man

erhält so lineare Gleichungen für die A_k :

$$\sum_{i=1}^n A_i \left[\int_a^1 \frac{\vartheta(\varrho)}{\varrho} f_i f_k d\varrho - \lambda \int_a^1 \frac{g_i g_k}{\varrho \vartheta(\varrho)} d\varrho \right] = 0 \quad (k=1, \dots, n),$$

deren Determinante verschwinden muß, wenn die A_k von Null verschieden sein sollen. Die so entstehende Gleichung n^{ten} Grades für λ hat genau n -Wurzeln $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_n$, von denen sich zeigen läßt, daß sie alle reell sind und positiv, wenn $\alpha > 0$ ist. Die kleinste dieser Wurzeln, $\bar{\lambda}_1$, ist eine obere Grenze für den ersten Eigenwert λ_1 . Da das Ritzsche Verfahren i. a. sehr gute Näherungswerte gerade für den ersten Eigenwert liefert, ist es für unseren Zweck gut brauchbar, obwohl die Abschätzung nach der falschen Seite hin erfolgt. In der Nähe der Konvergenzgrenze wird man ohnehin das Iterationsverfahren verlassen und zu anderen Methoden greifen, wie sie vom Verfasser a. a. O. entwickelt worden sind.

Um für die praktische Brauchbarkeit des Iterationsverfahrens eine Vergleichsmöglichkeit zu geben, seien hier die zahlenmäßigen Ergebnisse einer Iteration für einen Fall mitgeteilt, der auch exakt gerechnet werden kann*).

Eine im Außenrand eingespannte, im Innenrand freie Ringplatte konstanter Dicke ($R = 50$ cm, $a = 15$ cm, $h = 1$ cm) sei gleichmäßig mit $P(r) = 0,3 \frac{\text{kg}}{\text{cm}^2}$ belastet. Elastische Konstanten: $E = 2 \cdot 10^6$ kg/cm², $\nu = \frac{1}{3}$.

Für die Bezugssteifigkeit N_0^* erhält man: $N_0^* = 2\pi \cdot \frac{15}{8} \cdot 10^5$ kg/cm, und ferner ist $P^*(\varrho) = 2\pi R \cdot 0,3 \varrho \frac{\text{kg}}{\text{cm}} = 2\pi \cdot 15$ kg/cm, so daß $f(\varrho) = 0,2 \cdot \varrho$ wird.

Die exakten Funktionen $q_1(\varrho)$, $q_2(\varrho)$, $p_1(\varrho)$, $p_2(\varrho)$, von denen aus man leicht zu den physikalischen Größen $w(r)$, $w'(r)$, $m_r(r)$, $p_r(r)$ übergehen kann, sind in der folgenden Tabelle zusammengestellt:

ϱ	$10^2 \cdot q_1(\varrho)$	$10^2 \cdot q_2(\varrho)$	$10 p_1(\varrho)$	$10^2 \cdot p_2(\varrho)$
0,3	0,2682	−0,5326	0,0	0,0
0,4	0,2189	−0,5000	−0,07	−0,1035
0,5	0,1675	−0,4878	−0,16	−0,0963
0,6	0,1196	−0,4665	−0,27	+0,0368
0,7	0,0751	−0,4189	−0,40	0,3172
0,8	0,0372	−0,3322	−0,55	0,7687
0,9	0,0103	−0,1957	−0,72	1,416
1,0	0,0	−0,0	−0,91	2,283

Das Iterationsverfahren konvergiert für $\alpha > 0,254$. Hier ist $\alpha = 0,3$; man wird daher schlechte Konvergenz erwarten müssen. Tatsächlich zeigen die ersten beiden Iterationsschritte ein so ungünstiges Konvergenzverhalten, daß es sich als notwendig erwies, nach jedem Schritt eine einfache Mittelbildung einzuschalten. Die Iteration konnte dann in wenigen Schritten beendet werden. Die Integrationen wurden numerisch mit Hilfe der Simpsonschen Regel (Intervallbreite $\Delta\varrho = 0,1$) durchgeführt.

*) Vgl. z. B. K. Beyer, Statik im Eisenbetonbau, Bd. II, Berlin 1934.

Ergebnisse der einzelnen Iterationsschritte:

e	$10^2 \cdot q_2^{(0)}$	$10^2 \cdot p_2^{(1)}$	$10^2 \cdot q_2^{(1)}$	$10^2 \cdot p_2^{(2)}$	$10^2 \cdot q_2^{(2)}$	Mittel- bildung (I): $\frac{1}{2} \cdot 10^2$ $[q_2^{(1)} + q_2^{(2)}]$	$10^2 \cdot p_2^{(3)}$
0,3		0,0	-0,9995	0,0	-0,1798	-0,5897	0,0
0,4		0,0343	-0,9081	-0,2247	-0,1966	-0,5524	-0,1204
0,5		0,1539	-0,8249	-0,3021	-0,2414	-0,5332	-0,1231
0,6	0,0	0,3826	-0,7308	-0,2347	-0,2769	-0,5039	-0,0004
0,7		0,7441	-0,6118	+0,0014	-0,2832	-0,4475	+0,2752
0,8		1,2612	-0,4565	0,4167	-0,2458	-0,3512	0,7200
0,9		1,9568	-0,2554	1,0423	-0,1550	-0,2052	1,3655
1,0		2,8534	0,0	1,8910	0,0	0,0	2,2287

e	$10^2 \cdot q_2^{(3)}$	Mittel- bildung (II): $\frac{1}{3} [(I) + 10^2 q_2^{(3)}]$	$10^2 \cdot p_2^{(4)}$	$10^2 \cdot q_2^{(4)}$	Mittel- bildung (III): $\frac{1}{2} [(II) + 10^2 q_2^{(4)}]$	$10^2 \cdot q_1^{(III)}$
0,3	-0,4666	-0,5282	0,0	-0,5265	-0,5274	0,2685
0,4	-0,4592	-0,5058	-0,1056	-0,4951	-0,5005	0,2174
0,5	-0,4541	-0,4937	-0,0987	-0,4833	-0,4885	0,1679
0,6	-0,4408	-0,4724	+0,0319	-0,4632	-0,4678	0,1200
0,7	-0,4003	-0,4239	0,3127	-0,4163	-0,4201	0,0753
0,8	-0,3204	-0,3358	0,7620	-0,3306	-0,3332	0,0373
0,9	-0,1901	-0,1977	1,4099	-0,1948	-0,1963	0,0103
1,0	0,0	0,0	2,2716	0,0	0,0	0,0